CALCUL MATRICEAL

Cuvinte cheie. Matrice, adunarea matricilor, înmulţirea matricilor, determinant, matrice inversabilă, MMULT, MDETERM, MINVERSE.

Adunarea Matricilor

Pentru a aduna două matrici condiţia care trebuie respectată este ca dimensiunea celor două matrici să fie aceeaşi. Reamintim că prin dimensiunea unei matrici înţelegem numărul de linii şi de coloane pe care aceasta le are. În aceste condiţii adunarea matricilor se face termen cu termen. Adică:

- Dacă A este o matrice de dimensiune m×n, $A \in M_{m\times n}(R)$;
- B este o matrice cu aceeaşi dimensiune m×n, $B \in M_{m\times n}(R)$;
- Atunci termenii matricii rezultat C = A + B se vor exprima prin:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Programul Microsoft Excel nu are predefinită o funcţie specială pentru adunarea matricilor. Nici nu este nevoie de o astfel de funcţie. În Excel, adunarea matricilor se realizează prin introducerea unei formule de calcul în care se folosesc adresele relative ale celulelor care conţin valorile matricilor.

Exerciţiul 1.

Să se calculeze într-o foaie de calcul Excel suma matricilor de dimensiune 5×7:

$$A = \begin{pmatrix} 11.2 & 4.46 & 4 & 22.21 & 5.6 & 23 & 10 \\ 0.35 & 2.2 & 3.57 & 4.3 & 3 & 4.5 & 9 \\ 8.26 & 3.06 & 5.35 & 2.6 & 8 & 3.04 & 8.9 \\ 5.9 & 19.05 & 6.66 & 9.4 & 5.5 & 2.06 & 8.8 \\ 4.12 & 11 & 9.15 & 5.24 & 15 & 23.32 & 16.37 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 6.05 & 11.10 & 8.09 & 0.15 & 7.17 & 8 \\ 12.3 & 6.03 & 11.15 & 5.06 & 1.06 & 5.6 & 5 \\ 5 & 5.45 & 12 & 7.16 & 9 & 22 & 6.09 \\ 4.6 & 23.31 & 56 & 8 & 4.6 & 39.08 & 6.01 \\ 2.33 & 9 & 45.21 & 2 & 4.13 & 13.15 & 6.07 \end{pmatrix}$$

Introduceţi în foaia de calcul cele două matrici, fiecare valoare în câte o celulă a foii de calcul.

- Într-o altă celulă a foii de calcul introduceţi formula de calcul:

=Adresa elementului a11 + adresa elementului b11

- Folosind comanda Auto Fill spre dreapta iar apoi în jos calculaţi toate valorile matricii rezultat

C = A + B. Dimensiunea matricii rezultat va fi tot 5×7, deci fiţi atenţi să nu depăşiţi această dimensiune atunci când completaţi matricea rezultat prin comanda Auto Fill.

Observaţie. Puteţi utiliza şi o altă metodă pentru completarea matricii rezultat C. După ce aţi calculat primul element c11 = a11 + b11 procedaţi astfel:

1. Selectaţi celula în care aţi efectuat calculul;
2. Copiaţi formula de calcul astfel: deschideţi meniul **Edit** şi apelaţi comanda **Copy**;
3. Selectaţi un domeniu de celule de dimensiune 5×7, inclusiv celula în care aţi efectuat primul calcul (elementul c11);
4. Deschideţi meniul **Edit** şi apelati comanda **Paste**.

Avantajul acestei metode de calcul Excel este faptul că selectarea domeniului de definiţie a matricii rezultat nu se face în acelaşi timp cu efectuarea calculului, cum este în cazul folosirii comenzii Auto Fill apelate prin acţionarea mouse-ului. Pentru matrici de dimensiuni mari această metoda este mai sigură, neexistând riscul selectării greşite a numărului de linii şi coloane din matricea rezultat.

Înmultirea matricilor cu un scalar

Înmulţirea matricilor cu un scalar real se realizează în Excel pe acelaşi principiu de calcul ca şi adunarea matricilor:
1. Înmulţiţi primul element al matricii cu scalarul real dorit întroducând formula de calcul într-o celulă alăturată matricii introduse în foaia de calcul Excel:

= scalarul * adresa primului element din matrice

2. Folosind comanda Auto Fill sau metoda descrisă în observaţia de mai sus puteţi realiza calculul pentru întreaga matrice.

Exercitiul 2.

Înmulţiţi matricea A din exerciţiul precedent cu valoarea $\frac{3}{5}$.

Înmulţirea matricilor (MMULT)

După cum se cunoaşte din algebra elementară operaţia de înmulţire a două matrici se realizează prin procedeul "linii prin coloane". Există o singură restricţie asupra celor două matrici ce se înmulţesc, legată de numărul de linii şi coloane pe care le au cele două matrici:

$$A \in M_{m \times n}(R) \text{ si } B \in M_{n \times p}(R)$$

adică numărul de coloane a primei matrici să fie egal cu numărul de linii a celei de a doua matrici. În lumina acestei restricţii, înmulţirea matricilor nu este, în general, comutativă. Matricea produs C este dată de formula:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Aceasta operaţie se realizează în Excel prin intermediul funcţiei matematice **MMULT**.
Sintaxa funcţiei MMULT este:

=MMULT(array1,array2)

unde
- **Array1** reprezintă domeniul de celule în care s-a introdus prima matrice
- **Array2** reprezintă domeniul de celule în care s-a introdus cea de a doua matrice.

Atenţie. Pentru afişarea rezultatului funcţiei selectaţi mai întâi o zonă de celule de dimensiune **m x p**. Încheiaţi dialogul prin tastarea simultană a tastelor **Ctrl+Shift+Enter.**
Această procedură este valabilă pentru toate funcţiile Excel care au ca rezultat tot o matrice. Tastarea simultană a tastelor Ctrl+Shift+Enter are ca efect afişarea tuturor valorilor matricii rezultat. Dacă aţi încheia dialogul doar prin apăsarea butonului OK s-ar afişa doar prima valoare a matricii rezultat.

Exercitiul 3.
Introduceţi în foaia de calcul Excel următoarele matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 9 & -9 & 6 & 10 \\ 6 & 6 & 5 & 7 & 11 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5}(R) \text{ si } B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 17 & 3 \\ 5 & -6 & 2 & -4 \\ 3 & 11 & 15 & -7 \\ -2 & 7 & 11 & -8 \\ 0 & 8 & 9 & -5 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 4}(R)$$

Calculaţi produsul matricii A cu matricea B.

Indicaţii

1. Introduceţi in fiecare celulă a foii de calcul câte o valoare astfel încât la sfârşit să obţineţi două domenii de celule corespunzătoare celor două matrici.
2. În foaia de calcul Excel selectaţi un domeniu de celule **de dimensiune 3x4** corespunzător dimensiunii matricii ce se va obţine în urma produsului.
3. Din meniul **Insert** apelaţi comanda **Insert function**.
4. Selectaţi clasa de funcţii **Math&Trig**.
5. Selectaţi funcţia **MMULT**.
6. Tastaţi **OK**.
7. În fereastra de dialog care apare, în campul **Array1** introduceţi adresa domeniului de celule corespunzător primei matrici, iar în câmpul **Array2** introduceţi adresa domeniului de celule corespunzător celei de a doua matrici.
8. Tastaţi simultan combinaţia de taste **Ctrl+Shift+Enter**.

În zona selectată se va afişa matricea produs.

Calculul determinantului unei matrici pătratice (MDETERM)

Acest calcul asociat unei matrici pătratice este realizat în Excel de funcţia **MDETERM**.
Sintaxa funcţiei MDETERM este:

=MDETERM(array)

Unde **array** reprezintă adresa domeniului de celule din foaia de calcul unde a fost introdusă matricea.

Exercitiul 4.
Introduceţi în foaia de calcul Excel următoarea matrice pătratică de dimensiune 6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -6 & 3 & 2 & -14 \\ 6 & 1 & -10 & 2 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 5 & -11 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & -4 & 7 & 3 & 7 \\ -1 & -8 & 2 & -8 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculaţi determinantul matricii A.
Indicaţii
1. Apelaţi comanda **Insert /Function**.
2. Din setul de funcţii **Math&Trig** selectaţi funcţia **MDETERM**.
3. Tastaţi **OK**.
4. În câmpul **Array** introduceţi adresa domeniului de celule în care aţi introdus matricea.
5. Încheiaţi dialogul cu **OK**.

În celula în care aţi poziţionat cursorul va apare rezultatul calculului determinantului asociat matricii.

Inversarea matricilor (MINVERSE)

Operaţiunea de inversare a matricilor se poate aplica doar matricilor pătratice nesingulare, adică cu determinantul diferit de zero. Formula matematică de calcul a matricii inverse a unei matrici pătratice A de dimensiune n este:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$$

unde

- A^{-1} este notaţia pentru inversa matricii A
- $\mathbf{A}^*$ reprezintă matricea adjunctă. Aceasta matrice se obţine prin înlocuirea fiecărui element al matricii A cu determinantul obţinut din matricea pătratică A din care s-a eliminat linia şi coloana corespunzătoare elementului $\mathbf{a}_{ij}$.
- Iar **det A** este bineînteles determinantul matricii A.

Acest calcul este efectuat în Excel cu ajutorul functiei **MINVERSE** care are sintaxa:

=MINVERSE(array)

Unde **Array** reprezintă adresa domeniului de celule unde a fost introdusă matricea.

Atenţie. Rezultatul acestui calcul fiind tot o matrice, înainte de a apela funcţia MINVERSE trebuie selectată o zonă de celule de dimensiune n, cât dimensiunea matricii căreia i se calculează inversa. Nu uitaţi să încheiaţi dialogul prin combinaţia de taste Ctrl+Shift+Enter.

Exercitiul 5.

Introduceţi în foaia de calcul Excel matricea patratică de dimensiune 4:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Verificaţi dacă determinantul acestei matrici este diferit de zero apelând funcţia MDETERM. Dacă da, treceţi la pasul următor.
2. Selectaţi în foaia de calcul un domeniu de celule de dimensiune 4×4.
3. Apelaţi funcţia **MINVERSE.**
4. În câmpul **Array** introduceţi adresa domeniului de celule corespunzătoare matricii.
5. Încheiaţi dialogul cu Ctrl+Shift+Enter.

În zona selectată va apare matricea inversă a matricii A. Pentru a vă verifica, înmulţiţi cele două matrici: matricea A şi matricea inversă. Rezultatul trebuie să fie matricea identică de dimensiune 4×4.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicatie: rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare de tip Cramer

Prin sistem Cramer înţelegem un sistem de ecuaţii polinomiale liniare cu număr egal de necunoscute şi ecuaţii în care determinantul asociat sistemului este diferit de zero.

Un astfel de sistem de ecuaţii poate privit şi sub forma lui matriceală:

$$\mathbf{A\ X = B}$$

unde

- A este matricea sistemului formată din coeficienţii necunoscutelor
- X reprezintă vectorul necunoscutelor
- B este coloana termenilor liberi

În lumina acestor notaţii, soluţia sistemului se poate exprima matriceal:

$$\mathbf{X = A^{-1} B}$$

prin înmulţirea ecuaţiei la stânga cu inversa matricii A.

Vectorul necunoscutelor se obţine astfel prin înmulţirea inversei matricii sistemului cu coloana termenilor liberi, în această ordine. Ordinea acestor operaţii este esenţială întrucât înmulţirea matricilor nu este comutativă.

În exemplul următor vom rezolva un sistem liniar de 4 ecuaţii cu 4 necunoscute prin două metode:

Metoda 1. Vom calcula necunoscutele x, y, z şi t ale sistemului prin metoda Cramer. Prin această metodă fiecare necunoscută este exprimată ca raportul a doi determinanţi. Această metodă nu este suficient de rapidă raportat la posibilităţile de calcul ale programului Microsoft Excel.
Metoda 2. Vom da soluţia matriceală a sistemului, adică vom aplica metoda prezentată mai sus.

Prezentăm intenţionat rezolvarea aceluiaşi sistem de ecuaţii prin ambele metode pentru a sublinia avantajele evidente ale metodei matriceale. Indiferent însă de metoda aleasă primul lucru care trebuie verificat este nesingularitatea matricii sistemului, adică determinantul matricii sistemului să fie diferit de 0.

Exercitiul 6.
Se dă sistemul de ecuaţii.

$$\begin{cases} 2x & -1y+ & z & -t & = & 1 \\ 2x & -1y+ & & -3t & = & 2 \\ 3x & & -z & t & = & -3 \\ 2x+ & 2y & -2z & 5t & = & -6 \end{cases}$$

Rezolvaţi acest sistem mai întâi prin metoda Cramer, iar apoi matriceal.

Indicaţii

Metoda 1
Matricea sistemului formată din coeficienţii necunoscutelor este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Verificaţi dacă acest sistem este compatibil determinat, adică dacă detA≠0. Veţi folosi pentru acest calcul funcţia matematică Excel MDETERM.
2. Soluţia sistemului, în cazul când detA≠0, este dată de formulele Cramer:

$$\text{(Formulele Cramer)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{dx}{\det A} \\ y = \dfrac{dy}{\det A} \\ z = \dfrac{dz}{\det A} \\ t = \dfrac{dt}{\det A} \end{cases} \quad \text{unde}$$

dx este determinantul obţinut prin înlocuirea coloanei coeficienţilor lui x cu coloana termenilor liberi:

$$dx = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & -1 & 0 & -3 \\ -\mathbf{3} & 0 & -1 & 1 \\ -\mathbf{6} & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

iar ceilalţi determinanţi ***dy***, ***dz***, ***dt***, se calculează analog. Se procedează prin înlocuirea în determinantul matricii A a coloanelor corespunzătoare coeficienţilor necunoscutelor y, z, t prin coloana termenilor liberi.

$$dy = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 2 & \mathbf{2} & 0 & -3 \\ 3 & -\mathbf{3} & -1 & 1 \\ 2 & -\mathbf{6} & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$dz = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & -1 & \mathbf{2} & -3 \\ 3 & 0 & -\mathbf{3} & 1 \\ 2 & 2 & -\mathbf{6} & 5 \end{vmatrix}$$

$$dt = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & -1 & 0 & \mathbf{2} \\ 3 & 0 & -1 & -\mathbf{3} \\ 2 & 2 & -2 & -\mathbf{6} \end{vmatrix}$$

Calculaţi aceşti determinanţi

3. Efectuaţi apoi împărţirile corespunzătoare pentru a afla valorile necunoscutelor x, y, z, t (formulele Cramer).

Metoda 2

Vom prezenta rezolvarea aceluiaşi sistem prin metoda matriceală. Cele patru soluţii ale sistemului se vor obţine sub forma unui vetor linie cu 4 poziţii, fiecare poziţie corespunzând unei necunoscute.

1. Inversaţi matricea sistemului folosind funcţia matematică Excel MINVERSE.

- Nu uitaţi să selectaţi în prealabil o zonă de celule egală ca dimensiune cu dimensiunea matricii de inversat (adică 4×4)
- Nu uitaţi să încheiaţi dialogul prin tastarea simultană a tastelor Ctrl+Shift+Enter.

2. Înmulţiţi matricea inversă A^{-1} cu matricea coloană a termenilor liberi B. Veţi folosi funcţia matematică Excel MMULT.

- Rezultatul înmulţirii va fi o matrice de dimensiune 4×1, deci înainte de a apela funcţia MMULT nu uitaţi să selectaţi o coloană cu 4 celule în foaia de calcul.
- Rezultatul este tot o matrice, deci validarea rezultatului se realizează prin aceeaşi combinaţie de taste Ctrl+Shift+Enter.

3. Fiecare valoare a matricii coloană obţinute corespunde câte unei variabile, în ordinea apariţiei lor în sistemul de ecuaţii. Rezultatul se va afişa sub forma:

$$\textbf{Rezultat}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1.67 \\ -1.33 \end{pmatrix}$$

Exercitiul 7.

Verificaţi dacă sistemul de mai jos este de tip Cramer.

$$\begin{cases} \begin{array}{cccccc} 2x & -3y & -z & -4t & = & 1 \\ x & -\ y & & -2t & = & -4 \\ 3x & & +z & -6t & = & 3 \\ -7x & 3y & & 14t & = & 2 \end{array} \end{cases}$$

Bibliografie

www.freewebs.com/mifarm/mate/LP1_Matrici.pdf